Dimension d'un espace vectoriel

I. Famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{F} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n) = (\vec{e}_i)_{1\le i\le n}$ désigne une famille de vecteurs de E.
Dans le cas $n = 0$, on dit que c'est la famille vide.

1°) Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Déf : On appelle combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F} = (\vec{e}_i)_{1\le i\le n}$ tout vecteur $\vec{x}$ de E pouvant s'écrire

$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$ avec $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ bien choisis.

Déf : Soit $\mathcal{F} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$. On le note $\text{Vect}(\mathcal{F})$, $\text{Vect}(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ ou $\text{Vect}(\vec{e}_i)_{1\le i\le n}$.

Théorème :

Si $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ est une famille de vecteurs de E alors $\text{Vect}(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ i.e. :

$$\text{Vect}(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i \,/\, \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

2°) Famille génératrice

Déf : On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n) = (\vec{e}_i)_{1\le i\le n}$ de vecteurs de E est génératrice ssi $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

Prop : Un famille finie $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ est génératrice de E ssi tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ i.e. :

$\forall \vec{x} \in E, \exists (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$.

Prop : (principe de réduction de famille génératrice)

Si $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n,\vec{e}_{n+1})$ est une famille génératrice et $\vec{e}_{n+1} \in \text{Vect}(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ alors la sous-famille $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ est génératrice.

3°) Famille libre, famille liée

Déf : Un vecteur $\vec{u}$ est dit colinéaire à un vecteur $\vec{v}$ ssi il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires ssi l'un des deux est colinéaire à l'autre.

Déf : On dit qu'une famille $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n) = (\vec{e}_i)_{1\le i\le n}$ de vecteurs de E est libre ssi :

$\forall \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{o} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

On dit alors que les vecteurs $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ sont linéairement indépendants.

On dit que la famille $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n) = (\vec{e}_i)_{1\le i\le n}$ est liée ssi elle n'est pas libre i.e. :

$\exists \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{o}$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \neq (0,\ldots,0)$.

Cette égalité vectorielle est alors appelée relation linéaire sur les vecteurs $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$.

Prop : Soit $n \ge 2$ et $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E.

On a équivalence entre :

(i) $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ est liée,

(ii) l'un des vecteurs $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ est combinaison linéaire des autres.

Prop : (principe d'extension d'une famille libre)

Si $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une famille libre et $\vec{e}_{n+1} \notin \text{Vect}(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ alors $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n,\vec{e}_{n+1})$ est libre.

4°) Base d'un espace vectoriel

Déf : Soit $\mathcal{B}=(\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{B}$ est une base ssi $\mathcal{B}$ est libre et génératrice.

5°) Composantes dans une base

Théorème :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et possédant une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}$. On a : $\forall \vec{x}\in E, \exists!(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i$.

Déf : Avec les notations ci-dessus on dit que les scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont appelés composantes de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$.

Déf : Munir un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'une base $\mathcal{B}$, c'est signifier que les composantes des vecteurs sont désormais lues dans $\mathcal{B}$.

Déf : Si E est muni d'une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}$, on note parfois $\vec{x}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ ou $\vec{x}\begin{vmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{vmatrix}$ pour signifier que $\vec{x}$ est le vecteur de composantes $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Prop : On suppose E muni d'une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}$.
Si $\vec{x}\begin{vmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{vmatrix}$ et $\vec{y}\begin{vmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{vmatrix}$ alors $(\vec{x}+\vec{y})\begin{vmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{vmatrix}$ et $\forall\alpha\in\mathbb{K}$, $(\alpha.\vec{x})\begin{vmatrix}\alpha x_1\\ \vdots\\ \alpha x_n\end{vmatrix}$.

6°) Théorème de complétion de la base

Théorème : (de la base incomplète)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice.
On peut former une base de E en complétant la famille libre $\mathcal{L}$ par des vecteurs bien choisis dans la famille $\mathcal{G}$.

II. Dimension d'un espace vectoriel

1°) Espace vectoriel de dimension finie

Déf : Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit de dimension finie ssi il possède une famille génératrice finie.
Sinon, il est dit de dimension infinie.

Théorème :
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base.

Prop : Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie :
+ toute famille libre peut être complétée en une base,
+ de toute famille génératrice on peut extraire une base.

2°) Dimension

Théorème :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Une famille libre de vecteurs de E ne peut avoir plus (au sens strict) de vecteurs qu'une famille génératrice.

Cor : Les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie sont toutes constituées du même nombre de vecteurs.

Déf : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On appelle dimension de E le nombre de vecteurs constituant les bases de E. On le note $\dim E$ ou $\dim_{\mathbb{K}} E$.

Convention :
Si E n'est pas de dimension finie, on pose $\dim E=+\infty$.

Prop : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
$E\times F$ est de dimension finie et $\dim E\times F=\dim E+\dim F$.

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
E^n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim E^n = n \times \dim E$.

3°) Construction de bases en dimension connue

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.
1) Toute famille libre a au plus n éléments.
2) Toute famille génératrice a au moins n éléments.
3) Toute base a exactement n éléments.

Théorème :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une famille formée de $n = \dim E$ vecteurs de E.
On a équivalence entre :
(i) $\mathcal{B}$ est une base,
(ii) $\mathcal{B}$ est une famille libre,
(iii) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice.

4°) Applications

a) équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $p, q \in \mathbb{K}$. On note $E(p,q)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{K}$ solutions de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0$.

Prop : $E(p,q)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

b) suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $(p,q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ et $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0$.

Déf : On dit que (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Prop : L'ensemble $E(p,q)$ des suites considérées ci-dessus est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Prop : La suite géométrique (r^n) appartient à $E(p,q)$ ssi r est solution de l'équation $r^2 + pr + q = 0$.

Déf : L'équation $r^2 + pr + q = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$ est appelée équation caractéristique associée à la relation de récurrence : $u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0$.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:
Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation caractéristique possède deux solutions r et s.
$\forall u \in E(p,q), \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r^n + \mu s^n$.
Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique possède une solution double $r = -p/2$
$\forall u \in E(p,q), \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) r^n$.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$: comme ci-dessus avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées : $z = \rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ (avec $\rho > 0$ et $\theta \neq 0 \ [\pi]$).
$\forall u \in E(p,q), \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$.

III. Sous-espace vectoriel de dimension finie

1°) Dimension d'un sous espace vectoriel d'un espace de dimension finie

Théorème :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
De plus si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

En particulier :

Si $\dim F = 0$ alors $F = \{\vec{o}\}$.

Si $\dim F = 1$ alors on dit que F est une droite vectorielle.
Pour tout $\vec{u} \in F$ tel que $\vec{u} \neq \vec{o}$, on a $F = \text{Vect}(\vec{u})$.

On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de F.
Si $\dim F = 2$ alors on dit que F est un plan vectoriel.
Pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in F$ non colinéaires, on a $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

On dit que $\vec{u}, \vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de F.

Si $\dim F = \dim E - 1$ alors on dit que F est un hyperplan vectoriel de E.

2°) Sous-espace vectoriel supplémentaires en dimension finie

Théorème :

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.
On a $\dim E = \dim F + \dim G$.

Déf : Toute base de E obtenue en concaténant une base de F et une base de G est dite adaptée à la supplémentarité de F et G.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E possède au moins un supplémentaire.

Déf : Une telle base est dite adaptée à F.

3°) Théorème des quatre dimensions

Théorème :

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $F+G$ et $F \cap G$ sont de dimensions finies et $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

4°) Exploitation de la dimension

Théorème :

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.

Théorème :

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $\dim F + \dim G = \dim E$.
On a équivalence entre :
(i) F et G sont supplémentaires dans E,
(ii) $F + G = E$,
(iii) $F \cap G = \{\vec{o}\}$.

5°) Obtention d'une base d'un sous-espace vectoriel

a) sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

On désire déterminer une base de $F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F, on peut donc en extraire une base de la manière suivante :
Si $\mathcal{F}$ est libre alors $\mathcal{F}$ est une base.
Sinon, l'un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres, on peut alors retirer celui-ci de la famille sans perdre le caractère générateur.
Si besoin, on reprend ce processus jusqu'à obtention d'une famille libre donc d'une base de F.

b) sous-espace vectoriel défini par équations

On détermine une base d'un tel sous-espace vectoriel en résolvant les équations de sorte d'exprimer une famille génératrice.

c) détermination d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel

Si F est un sous-espace vectoriel non trivial d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, on peut déterminer un supplémentaire de F en complétant une base de F en une base de E car on sait que les vecteurs complétant génèrent un supplémentaire de F dans E.

6°) Rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (\vec{e}_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Déf : On appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$. On le note $\text{rg}(\mathcal{F})$ ou $\text{rg}(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$

Ainsi $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p) = \dim \text{Vect}(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$.

Prop : On a $\text{rg}(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p) \leq p, \dim E$.

Théorème :

+ $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow \text{rg}(\mathcal{F}) = p$,
+ $\mathcal{F}$ est génératrice $\Leftrightarrow \text{rg}(\mathcal{F}) = \dim E$,
+ $\mathcal{F}$ est une base $\Leftrightarrow \text{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim E$.

Prop : On ne modifie pas $\text{Vect}(\mathcal{F})$ ni a fortiori $\text{rg}(\mathcal{F})$ lorsque :

+ on retire le vecteur nul de $\mathcal{F}$ si celui-ci y apparaît,
+ on permute les vecteurs de $\mathcal{F}$,
+ on dilate un vecteur par un $\lambda \neq 0$
+ on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres.

IV. Applications linéaires en dimension finie

E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

1°) Image d'une famille de vecteurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de E.

Déf : On appelle image de la famille $\mathcal{B}$ par f, la famille : $f(\mathcal{B}) = (f(\vec{e}_i))_{1\leq i\leq n}$.

Prop : $f(\text{Vect}(\mathcal{B})) = \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$ i.e. : $f(\text{Vect}(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)) = \text{Vect}(f(\vec{e}_1),\dots,f(\vec{e}_n))$.

Théorème :

Si $\mathcal{B}$ est libre et f injective alors $f(\mathcal{B})$ est libre.

Si $\mathcal{B}$ est génératrice et f surjective alors $f(\mathcal{B})$ est génératrice.

Si $\mathcal{B}$ est une base et f un isomorphisme alors $f(\mathcal{B})$ est une base.

Cor : Si V est un sous-espace vectoriel de E alors $\dim f(V) \leq \dim V$ avec égalité lorsque f est injective.

Cor : Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies ou non alors :

Si f est injective alors $\dim E \leq \dim F$.

Si f est surjective alors $\dim F \leq \dim E$.

Si f est un isomorphisme alors $\dim E = \dim F$.

2°) Rang d'une application linéaire

Déf : On appelle rang de $f \in \mathcal{L}(E,F)$ la dimension de l'image de f.

On note $\text{rg}(f) = \dim \text{Im} f$.

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a $\text{rg}(f) \leq \min(n,p)$.

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. On a $\text{rg}(g\circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

De plus :

Si g injective alors $\text{rg}(g\circ f) = \text{rg}(f)$.

Si f surjective alors $\text{rg}(g\circ f) = \text{rg}(g)$.

Cor : On ne modifie pas le rang d'une application linéaire en composant avec un isomorphisme.

3°) Théorème du rang

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) f réalise un isomorphisme de tout supplémentaire de $\ker f$ dans E vers $\operatorname{Im} f$.

2) $\operatorname{rg}(f) + \dim \ker(f) = \dim E$.

4°) Théorème d'isomorphisme

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

f injective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim E$,

f surjective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim F$,

f est un isomorphisme $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim E = \dim F$.

Théorème : (d'isomorphisme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies tels que : $\dim E = \dim F = n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a équivalence entre :

(i) f est un isomorphisme,

(ii) f est injective,

(iii) f est surjective,

(iv) $\operatorname{rg}(f) = n$,

(v) $\exists g \in \mathcal{L}(F,E), g \circ f = \mathrm{Id}_E$,

(vi) $\exists h \in \mathcal{L}(F,E), f \circ h = \mathrm{Id}_F$.

De plus si tel est le cas : $g = h = f^{-1}$.

En particulier :

Pour $F = E$, le théorème ci-dessus caractérise les automorphismes de E.

5°) Bases et applications linéaires

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_p)$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(\mathcal{B}) = \mathcal{F}$ i.e. $\forall 1 \leq i \leq p, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$.

Cor : Une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

On a $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f(\mathcal{B})) = \operatorname{rg}(f(\vec{e}_1),\ldots,f(\vec{e}_p))$.

Cor : Par suite :

f est injective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim E \Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est libre.

f est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim F \Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est génératrice.

f est bijective $\Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ base de F.

Cor : Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

6°) Expression analytique d'une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies munis de bases $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p)$ et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n)$. Pour chaque $\vec{x} \in E$, on convient de noter $x_1,\ldots,x_p$ ses composantes dans $\mathcal{B}$ et pour chaque $\vec{y} \in F$, on convient de noter $y_1,\ldots,y_n$ ses composantes dans $\mathcal{C}$ ..

Théorème :

Les applications linéaires de E vers F correspondent aux applications f qui envoie $\vec{x} \in E$ sur $\vec{y} \in F$ donné par :

$$\begin{cases} y_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ y_n = a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{cases}$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

Un tel système est appelé expression analytique de l'action de f.

En Particulier :

Quand $F = \mathbb{K}$ muni de sa base canonique, on obtient que l'expression analytique d'une forme linéaire f sur E est de la forme : $y = a_1x_1 + \cdots + a_px_p$ avec $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{K}$,

autrement dit $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_px_p$

7°) Equation d'un hyperplan

Supposons $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$

Prop : Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.

Prop : Tout hyperplan peut se voir comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

On suppose E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

Pour tout $\vec{x} \in E$, notons $x_1, ..., x_n$ ses composantes dans $\mathcal{B}$.

Théorème :

Les hyperplans de E sont les ensembles H constitués des $\vec{x} \in E$ vérifiant une relation du type $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$.

Déf : L'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est alors appelée équation de l'hyperplan H relative à la base $\mathcal{B}$.